

Разработчик:  
учитель информатики  
Губина Т.Н.

Методическая разработка системы интегрированных уроков  
по информатике и математике  
в 10 классе

Урок № 4

**Тема: Упрощение выражений**

**Цель урока:**

- обучающая: изучить команды системы Maxima для работы с тригонометрическими выражениями, повторить и закрепить знания и умения учащихся по теме «Тригонометрические выражения», повторить тригонометрические тождества;
- развивающая: развитие памяти, логического мышления, способности четко формулировать свои мысли; развитие устной речи; продолжить развитие навыков работы на компьютере; интерес к предметам математики и информатики;
- воспитывающая: развитие кругозора; воспитание аккуратности при выполнении практических работ, бережного отношения к компьютерной технике; воспитание информационной культуры учащихся; воспитывать у учащихся мотивацию учебной деятельности.

**Оборудование:** мел, доска, 12 компьютеров IBM PC, экран, проектор+компьютер, ОС ALT Linux Master, графическая оболочка wxMaxima, презентация «Упрощение тригонометрических выражений», карточки с заданиями, раздаточный материал.

**Межпредметные связи:** применение полученных знаний, умений и навыков для выполнения домашних заданий по математике, самоконтроля.

**План – конспект урока:**

**1. Начальный этап урока: (4 мин)**

- 1) организационный момент
- 2) проверка домашней работы
- 3) мотивация на изучение нового материала
- 4) постановка цели урока
- 5) знакомство с этапами урока

**2. Основная часть урока: (34 мин)**

- 1) объяснение нового материала с использованием презентации (8 мин)

2) первичное закрепление материала: работа учеников с системой Maxima под руководством учителя (10 мин)

3) закрепление изученного материала: индивидуальная работа учеников с системой Maxima (16 мин)

### 3. Заключительный этап урока: (2 мин)

1) итог урока

2) домашнее задание

### Оформление доски:

Дата проведения урока Тема: Упрощение выражений
<i>trigsimp(выражение)</i>
<i>trigexpand(выражение)</i>
<i>trigreduce(выражение)</i>
<i>halfangles</i>
<i>trigsign</i>
<i>trigexpandplus</i>
<i>trigexpandtimes</i>

### Ход урока:

#### 1. Начальный этап урока:

**Организационный момент:** проверка готовности учеников к уроку, отмечаем отсутствующих учеников.

#### **Проверка домашней работы**

На предыдущем уроке мы с вами познакомились с возможностями системы компьютерной математики по преобразованию целых и дробных выражений. Дома вы учили команды для работы с выражениями. Давайте вспомним их.

Вопросы:

1. Какие действия над выражениями можно выполнять в системе Maxima?
2. Как разложить выражение на множители?
3. Как раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в выражении?
4. Какие есть команды для упрощения выражений?

#### **Мотивация на изучение нового материала**

Но, как мы знаем из курса алгебры, существуют и другие виды выражений. Наряду с рациональными, иррациональными выражениями распространены и тригонометрические выражения. Линия «Тригонометрия» является одной из наиболее важных, объемных и сложных линий всего школьного курса математики.

Как же система Maxima работает с тригонометрическими выражениями? Если попробовать применить ранее рассмотренные команды для работы с выражениями, то мы не получим желаемого результата. Оказывается, в Maxima есть специальные команды для преобразования выражений и все они начинаются с префикса trig.

#### **Постановка цели урока**

Дома вы повторяли основные тригонометрические тождества и формулы, решали задания на работу с тригонометрическими выражениями. Это была ваша подготовительная работа к нашему уроку и все это вам сегодня пригодится.

Итак, сегодня на уроке мы с вами познакомимся с командами системы *Maxima* для преобразования тригонометрических выражений. (ученики записывают в тетрадь число, тему урока)

### **Знакомство с этапами урока**

Сначала мы изучим команды и их назначение, затем попробуем все вместе применить полученные знания и выполним ряд заданий, в конце урока проведем самостоятельную работу по вариантам.

## **2. Основная часть урока:**

### **Объяснение нового материала с использованием презентации к уроку № 4 (Приложение)**

Итак, первая команда, предназначенная для работы с тригонометрическими выражениями, - это функция `trigsimp` — функция упрощения тригонометрического выражения. Ее синтаксис: (Слайд 2)

*trigsimp(выражение)*

Она старается упростить любое тригонометрическое выражение, используя известные формулы, такие как  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  и др.

Для того, чтобы воспользоваться этой функцией, можно:

1. Задать команду непосредственно в строке ввода;
2. Задать в строке ввода выражение и нажать на кнопку *Упростить(trig.)* на панели инструментов.

Следующая команда для работы с тригонометрическими выражениями (Слайд 3) — функция `trigreduce` — позволяет понижать степень тригонометрических функций, входящих в выражение. Ее синтаксис:

*trigreduce(выражение)*

Следующая команда для работы с тригонометрическими выражениями (Слайд 4) раскрывает скобки в тригонометрических выражениях. Ее синтаксис:

*trigexpand(выражение)*

Также имеется ряд флагов для выполнения раскрытия тригонометрических выражений. Флаг *halfangles* — управляет раскрытием формул половинных углов (Слайд 5).

Флаг *trigsign* регулирует вынос знака за пределы тригонометрической функции. Он является установленным по умолчанию, т.е. если применяется автоматически ко всем тригонометрическим функциям (Слайд 6).

Флаг *trigexpandplus* позволяет применять формулы сумм углов. (слайд 7)

Флаг *trigexpandtimes* позволяет применять формулы кратных углов. (слайд 8)

Три последних флага установлены по умолчанию.

### **Первичное закрепление материала: работа учеников с системой *Maxima* под руководством учителя**

Итак, давайте попробуем решить задания из домашней работы: преобразовать тригонометрические выражения к требуемому виду в системе *Maxima* и сравнить результат с результатом, полученным дома.

Включаем компьютеры, загружаем систему *Maxima*.

Начнем с первого задания. Вспомним, что нужно было сделать в первом задании? (раскрыть скобки  $\sin(a+2b)$ ,  $\sin(x+y) + \sin(3x+4y)$ )

Какая команда системы *Maxima* поможет нам это сделать? (команда `trigexpand`)

Как решить поставленную задачу? (один ученик на доске записывает команду для решения задачи для первого выражения, второй — для второго выражения)

Ученики выполняют решение в системе Maxima. Полученные результаты:

```
(%i1) trigexpand(sin(a+2*b));
(%o1) cos(a)sin(2 b)+sin(a)cos(2 b)
```

```
(%i2) trigexpand(sin(x+y)+sin(3*x+4*y));
(%o2) cos(3 x)sin(4 y)+sin(3 x)cos(4 y)+cos(x)sin(y)+sin(x)
cos(y)
```

Итак, система решила поставленную перед ней задачу. Сравним полученные результаты с результатами, полученными дома. (результаты совпали)

Теперь перейдем ко второму заданию. Что требовалось во втором задании?

(упростить тригонометрическое выражение  $\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \operatorname{ctg}^2 x$ ).

Какую команду системы Maxima мы будем использовать? (команда trigsimp)

Как ею воспользоваться? (один ученик на доске записывает команду для упрощения выражения)

Результат решения в системе Maxima:

```
(%i3) trigsimp(sin(x)^2/(1-sin(x)^2)*cot(x)^2);
(%o3) 
$$-\frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2 - 1}$$

```

Посмотрим, совпали ли наши результаты? (нет)

Система Maxima не дорешала наше задание. Если посмотреть на полученный результат, то выражение можно упростить еще. Как? (предполагаемый ответ ученика: в знаменателе дроби воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и тогда выражение получится равным 1)

Можно ли попробовать в системе Maxima довести результат до конца? Давайте применим к полученному результату команду trigreduce. Полученный результат:

```
(%i2) trigreduce(%);
(%o2) 1
```

И у нас осталось еще одно задание из домашней работы. Давайте проверим полученный вами результат с помощью системы Maxima. Нам надо было упростить тригонометрическое выражение  $2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos x$ .

Какая команда нам для этого подойдет? (предполагаемый ответ ученика: так как в выражение входит функция cos в квадрате, то нужно воспользоваться командой понижения степени — trigreduce)

Как же задать команду? (один ученик на доске записывает команду)

Давайте попробуем выполнить упрощение в системе Maxima. Полученный результат:

```
(%i1) trigreduce(2*cos(x/2)^2-cos(x));
(%o1) 
$$2 \left( \frac{\cos(x)}{2} + \frac{1}{2} \right) - \cos(x)$$

```

Как видим, мы понизили степень нашего выражения, но результат проще не стал. Что же нам сделать? (предполагаемый ответ учеников: воспользоваться функцией упрощения тригонометрического выражения `trigsimp`)

Как применить функцию упрощения к нашему результату? (предполагаемый ответ ученика: установить курсор в строке ввода и нажать кнопку *Упростить(триг.)* на панели инструментов)

Полученный результат:

```
(%i2) trigsimp(%);
(%o2) 1
```

Какой же вывод мы с вами сделаем? (предполагаемый ответ учеников: в системе Maxima есть функции для работы с тригонометрическими выражениями, но не всегда они способны преобразовать выражение к требуемому виду, но для достижения требуемого результата можно попробовать воспользоваться несколькими командами)

### **Закрепление изученного материала: индивидуальная работа учеников с системой Maxima**

Перед каждым из вас лежат карточки с заданиями для самостоятельной работы. Вам сейчас предстоит самостоятельно попробовать применить полученные на уроке знания и решить задания в системе Maxima.

<p style="text-align: center;"><b>Карточка № 1</b></p> <p>Задание 1. Упростите выражение <math>\frac{\sin(a+b) - \cos a \sin b}{\sin(a-b) + \cos a \sin b}</math></p> <p>Задание 2. Упростите выражение <math>\sin^2 x + \cos^2 x</math></p> <p>Задание 3. Представьте в виде суммы <math>\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a+\pi)</math></p> <p>Задание 4. Докажите тождество <math>\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}</math></p> <p>Задание 5. Докажите тождество <math>\frac{\operatorname{tg}(\pi-t)}{\cos(\pi+t)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)} = \operatorname{tg}^2 t</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Карточка № 2</b></p> <p>Задание 1. Упростите выражение <math>\frac{\cos(a+b) + \sin a \sin b}{\cos(a-b) - \sin a \sin b}</math></p> <p>Задание 2. Упростите выражение <math>3\cos^2 x - \sin^3 x</math></p> <p>Задание 3. Представьте в виде суммы</p> <p>Задание 4. Докажите тождество <math>\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)</math></p> <p>Задание 5. Докажите тождество <math>\frac{\sin(\pi-t)}{\operatorname{tg}(\pi+t)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi-t)}{\sin(-t)} = \sin t</math></p>
<p style="text-align: center;"><b>Карточка № 3</b></p> <p>Задание 1. Упростите выражение <math>\frac{\sin(a-b) + 2\cos a \sin b}{2\cos a \cos b - \cos(a-b)}</math></p> <p>Задание 2. Упростите выражение <math>4(\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a)^2 \sin^2 2a</math></p> <p>Задание 3. Представьте в виде суммы <math>\cos a \sin(a+b)</math></p> <p>Задание 4. Докажите тождество <math>\frac{\sin 2a + \sin 6a}{\cos 2a + \cos 6a} = \operatorname{tg} 4a</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Карточка № 4</b></p> <p>Задание 1. Упростите выражение <math>\frac{\cos(a-b) - 2\sin a \sin b}{2\sin a \cos b - \sin(a-b)}</math></p> <p>Задание 2. Упростите выражение <math>(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x</math></p> <p>Задание 3. Представьте в виде суммы <math>2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{5}</math></p> <p>Задание 4. Докажите тождество <math>\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha</math></p>

<p>Задание 5. Докажите тождество</p> $\frac{\sin^2\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)} = \cos t$	<p>Задание 5. Докажите тождество</p> $\frac{\cos^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi + t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)} = \cos^2 t$
--	---

### 3. Заключительный этап урока:

#### *Подведение итогов урока*

- демонстрация итоговых работ (отметить работы с дополнительными элементами, которые внесены по инициативе учащихся)
- разбор типичных ошибок, допущенных в ходе индивидуальной работы учащихся
- оценка работы каждого ученика учителем (выбор лучшей работы учеников)
- выставление оценок
- проведение целевой установки на следующий урок: на сегодняшнем занятии мы с вами познакомились с командами для работы с тригонометрическими выражениями, научились их применять на практике. Следующий наш урок будет посвящен графическим возможностям системы Maxima.

#### *Домашнее задание*

Дома повторить понятие линейной, квадратичной, тригонометрической функции, дробно-рациональной функции, функции  $y = \sqrt{x}$ , вспомнить вид графиков, их название и способы построения.

Выполнить задания в тетради:

1. Построить графики линейных функций:  $y = -2x + 1$ ,  $y = 5x - 4$ ,  $y = x$

2. Построить графики квадратичных функций:

$$y = x^2 + 4x + 1, y = -x^2 + 4x + 1, y = x^2$$

3. Построить графики дробно-рациональных функций:  $y = \frac{5}{x-1}$ ,  $y = \frac{8}{x+4}$

4. Построить графики функций:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{2 * x}$ ,  $y = -\sqrt{x}$

5. Построить графики тригонометрических функций:  
 $y = 2 \sin x$ ,  $y = 0,5 \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$

#### **Список использованной литературы**

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс: учебник. - М.: МНЕМОВИНА, 2001.
2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс: задачник. - М.: МНЕМОВИНА, 2001.
3. Сборник задач по математике для поступающих во втузы//Сканави М.И. Книга 1. -М., 1992.
4. Додиер Р. Коротко о Maxima. Пер. А. Бешенов, 2007.
5. Тарнавский Т. Maxima — укротитель выражений // LinuxFormat, № 9, 2006.